分 类 号: O174.52　　　　密 级:

学校代码: 10414　　　　学 号: 2011010749

江西师范大学

硕士研究生学位论文

复微分方程解的增长性与辐角分布

Growth and angular distribution of complex differential equations

何 涛

院　　所: 数信学院　　　　导师姓名: 易才凤教授

学科专业: 基础数学　　　　研究方向: 复分析

二〇一四 年 六 月

独 创 性 声 明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名:　　　　　　　　签字日期:　　　年　　月　　日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解江西师范大学研究生院有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权江西师范大学研究生院可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

（保密的学位论文在解密后适用本授权书）

学位论文作者签名:　　　　　　　　导师签名:

签字日期:　　　年　　月　　日　　签字日期:　　　年　　月　　日

摘　要

本文应用 *Nevanlinna* 值分布的基本理论和方法, 研究了微分方程解的一些性质, 包括解的增长性及辐角分布, 全文共分四章.

第一章, 简单介绍了复微分方程的研究背景，然后叙述了本文所需的预备知识及相关记号.

第二章, 主要利用熊庆来无限级型函数和庄圻泰关于无限级 *Borel* 方向的一个等价条件,研究了微分方程 $f'' + A(z)f = 0$ 解的零点聚值线和 *Borel* 方向之间的关系,其中 $A(z)$ 是超越亚纯函数且 $\sigma(A) < \infty$.

第三章, 运用 *Nevanlinna* 值分布的理论和方法,研究了亚纯系数高阶线性微分方程解的增长性,在假设某个系数以无穷为亏值的条件下,证明了微分方程的每一个非零解的增长级均为无穷.

第四章, 运用 *Nevanlinna* 值分布的理论和方法,研究了整系数高阶线性微分方程解的增长性,在假设某个系数满足杨—张不等式极端情况的条件下,证明了微分方程的每一个非零解的增长级均为无穷.

关键词： 整函数；亚纯函数；微分方程；零点聚值线；亏值；*Borel* 方向

Abstract

In this thesis, we investigated some properties of solutions of the linear differential equations by using the value distribution theory and methods of Nevanlinna. The properties mainly contain the growth of solutions and the angular distribution. It includes following four chapters.

Chapter 1, We introduced the research background of linear differential equations. Then we narrate some notations and knowledge which will be used in the following chapters.

Chapter 2, By using the infinity order type function of Xiong Qinglai's and a sufficient and necessary condition for infinity order Borel direction which was established by Chuang Chitai, we established the connection between the cluster ray of zero-sequence and Borel direction of solutions of second order differential equations $f'' + A(z)f = 0$, where $A(z)$ is a meromorphic function of finite order.

Chapter 3, The growth of solutions of higher order linear differential equations with meromorphic coefficients is investigated by using the fundamental theory and method of Nevanlinna. Assume that one of coefficients has infinite deficient value, it is proved that every solution $f \not\equiv 0$ of the differential equation is of infinite order .

Chapter 4, The growth of solutions of higher order linear differential equations with entire coefficients is investigated by using the fundamental theory and method of Nevanlinna. Assume that one of coefficients is extremal for Yang-Zhang inequality, it is proved that every solution $f \not\equiv 0$ of the differential equation is of infinite order.

Key words: Entire functions; Meromorphic function; Differential equation; The cluster ray of zero-sequence; Deficient value; Borel direction

目 录

中文摘要 …… I
英文摘要 …… II
目　　录 …… III
第一章 引言与预备知识 …… 1
1.1 引言 …… 1
1.2 预备知识及相关定义 …… 2
1.2.1 复平面内的 *Nevanlinna* 特征及增长级 …… 2
1.2.2 角域内的 *Nevanlinna* 特征及增长级 …… 5
第二章 复振荡中的辐角分布 …… 7
2.1 引言与结果 …… 7
2.2 引理 …… 8
2.3 定理的证明 …… 12
第三章 一类高阶亚纯系数线性微分方程解的增长性 …… 16
3.1 引言与结果 …… 16
3.2 引理 …… 18
3.3 定理的证明 …… 19
3.3.1 定理 3.1.1 的证明 …… 19
3.3.2 定理 3.1.2 的证明 …… 21
3.3.3 定理 3.1.3 的证明 …… 23
第四章 一类高阶整系数线性微分方程解的增长性 …… 24
4.1 引言与结果 …… 24
4.2 引理 …… 25
4.3 定理的证明 …… 27
4.3.1 定理 4.1.1 的证明 …… 27
4.3.2 定理 4.1.2 的证明 …… 29
参考文献 …… 31
致谢 …… 35
攻读硕士学位期间完成的研究论文 …… 37

第一章　引言与预备知识

1.1　引言

微分方程的复振荡理论是上世纪 80 年代初期兴起的研究领域,它主要是应用复分析的理论与方法,研究复域上微分方程解的振荡性质,其运用的工具主要有亚纯函数的 *Nevanlinna* 值分布理论,位势理论, *Wiman* – *Valiron* 理论,渐进方法等,该领域的研究具有广泛的实际应用背景.

1982 年 *S.Bank* 和 *L.Laine* 在[1]中首次应用亚纯函数的 *Nevanlinna* 理论研究了二阶微分方程

$$f'' + A(z) f = 0 \tag{1.1}$$

解的增长级和零点收敛指数.随后,关于二阶和高阶微分方程解的增长性问题受到国内外很多学者的关注 *J.K.Langley*, *G.Gundersen*, *G.*Frank 和 *S.Hellerstein* 等人在此方面作了大量的研究工作.在国内,何育赞,高仕安和陈宗煊等人从事该领域的研究多年,也获得了一系列深入的结果.亏值理论在亚纯函数的值分布理论起有重要作用,近年来,不少学者从亏值的角度研究了微分方程解的增长性,得到了一些富有起始性和启发性的结果.

亚纯函数值分布研究的重点主要体现在增长性与辐角分布两大内容上.在辐角分布的研究中,1919 年, *G.Julia* 应用正规族理论证明了超越整函数 *Julia* 方向的存在性,从而开创了辐角分布论的研究.1928 年, *G.*Valiron 应用 *Nevanlinna* 理论证明了有穷正级亚纯函数的 *Borel* 方向的存在性,大大促进了辐角分布论的发展.在我国庄圻泰、杨乐和张广厚等数学家在这个领域耕耘多年并取得了突出的成果.近些年来,伍胜健、郑建华等对复振荡中的辐角分布问题作了进一步的研究,也获得了一些颇有意义的结果.

本文在前人研究的基础上,从二阶到高阶,整函数系数到亚纯函数系数等方面继续对微分方程解的增长性及辐角分布的相关性质进行了研究.

1.2 预备知识及相关定义

1.2.1 复平面内的Nevanlinna特征及增长级

下面简要介绍本文中需要用到的值分布理论的一些相关定义和标准记号,详细内容请参阅文献[2],[3].

假设 $f(z)$ 是定义在圆 $|z|\le R(0<R<\infty)$ 内的亚纯函数, a 为任一有穷复数.用 $n(r,f)$（也记为 $n(r,f=\infty)$ 或 $n(r,\infty)$）表示 $f(z)$ 在 $|z|\le r(0\le r<R)$ 上的极点个数,重级极点按其重数计算；用 $n(r,\frac{1}{f-a})$（也记为 $n(r,f=a)$ 或 $n(r,a)$）表示 $f(z)-a$ 在 $|z|\le r(0\le r<R)$ 上的零点个数,重级零点按重数计算.

定义 1[2]　非负实数的正对数定义如下：

$$\begin{cases}\log^+ x=\log x, & x\ge 1;\\ \log^+ x=0, & 0\le x<1.\end{cases}$$

易知当 $x>0$ 时,有 $\log x=\log^+ x-\log^+\frac{1}{x}$.

定义 2[2]　设 $f(z)$ 是定义在 $|z|\le R(0<r<R<\infty)$ 上的亚纯函数,记

$$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta,$$

$$m(r,\frac{1}{f-a})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{\left|f(re^{i\theta})-a\right|}d\theta,a\ne\infty,$$

$$N(r,f)=\int_0^r\frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}dt+n(0,f)\log r,$$

$$N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=\int_0^r\frac{n(t,\frac{1}{f-a})-n(0,\frac{1}{f-a})}{t}dt+n(0,\frac{1}{f-a})\log r,a\ne\infty,$$

$m(r,f)$ 也可记为 $m(r,f=\infty)$ 或 $m(r,\infty)$,表示的是 $\log^+|f(z)|$ 在 $|z|=r$ 上的平均值,相应的, $m(r,\frac{1}{f-a})$ 也可记为 $m(r,f=a)$ 或 $m(r,a)$,表示的是 $\log^+\frac{1}{|f(z)-a|}$ 在 $|z|=r$ 上的平均值; $N(r,f)$ 也可记为 $N(r,f=\infty)$ 或 $N(r,\infty)$,称为 $f(z)$ 的极点的密指量,

相对应的,$N(r,\frac{1}{f-a})$ 也可记为 $N(r,f=a)$ 或 $N(r,a)$,称作是 $f(z)$ 的 a 值点的密指量.

定义 3[2]　设 $f(z)$ 是定义在 $|z|\le R(0<r<R<\infty)$ 上的亚纯函数,记

$$T(r,f)=m(r,f)+N(r,f),$$

则称 $T(r,f)$ 为 $f(z)$ 的 *Nevanlinna* 特征函数,简称为 $f(z)$ 的特征函数.

定义 4[2]　设 $f(z)$ 是定义在 $|z|\le R(0<r<R<\infty)$ 上的亚纯函数, $f(z)$ 的增长级和下级分别记为 $\rho(f)$ 和 $\mu(f)$.而 $\lambda(f)$,$\bar{\lambda}(f)$ 分别表示 f 的零点和不同零点的收敛指数,$\lambda\left(\frac{1}{f}\right)$,$\bar{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right)$ 分别表示 f 的极点和不同极点的收敛指数.具体定义如下.

$$\rho(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T(r,f)}{\log r},\ \mu(f)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

$$\lambda(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log N(r,\frac{1}{f})}{\log r},\ \bar{\lambda}(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log \overline{N}(r,\frac{1}{f})}{\log r}.$$

$$\lambda(\frac{1}{f})=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log N(r,f)}{\log r},\ \bar{\lambda}(\frac{1}{f})=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log \overline{N}(r,f)}{\log r}.$$

定义 5[2]　设 $f(z)$ 是定义在 $|z|\le R(0<r<R<\infty)$ 上的亚纯函数,定义 f 的超级为 $\rho_2(f)$,

$$\rho_2(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

定义 6[2]　设 $f(z)$ 为定义在 $|z|\le R(0<r<R<\infty)$ 上的超越亚纯函数,a 为任意复数.定义 a 对于 $f(z)$ 的亏量为

$$\delta(a,f)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)}=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)}.$$

定义 7[2]　设 $f(z)$ 为定义在 $|z|\le R(0<r<R<\infty)$ 上的 ρ $(0<\rho(f)\le\infty)$ 级亚

纯函数,一条从原点出发的射线 $\arg z=\theta$,如果满足

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon,r),\ f=a)}{\log r}=\rho,$$

对所有的复数 a 及任意正数 ε 恒成立,至多除去关于 a 的两个例外复数.则称射线 $\arg z=\theta$ 为 f 的一条 ρ 级 Borel 方向.其中 $n(\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon,\mathrm{r}),\ f=\mathrm{a})$ 表示 $f(z)$ 在角域 $\overline{\Omega}(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon,r)=\{z:\theta-\varepsilon\le\arg z\le\theta+\varepsilon,|z|\le r\}$ 内的 a 值点的个数,重级 a 值点按重数计算.

定义 8[2] 设 $f(z)$ 是定义在 $|z|\le R(0<r<R<\infty)$ 上的亚纯函数, ρ 为有穷正数. $\rho(r)$ 称为 $T(r,\ f)$ 或 $f(z)$ 的一个精确级,若

(1) $\rho(r)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的非负连续函数,以及 $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho$;

(2) 除去可数个点外 $\rho'(r)$ 存在,且 $\lim\limits_{r\to\infty}r\rho'(r)\log r=0$;

(3) 当 r 适当大时恒有 $r^{\rho(r)}\ge T(r,\ f)$,并且存在一列趋于 ∞ 的正数 (r_j),使得 $r_j^{\rho(r_j)}=T(r_j,\ f)$.

定义 9[4] 设 $f(z)$ 是定义在 $|z|\le R(0<r<R<\infty)$ 上的无限级亚纯函数,实函数 $\rho(r)$ 称为 $f(z)$ 的熊庆来无限级,如果 $\rho(r)$ 满足如下性质:

(1) $\rho(r)$ 是 $r\ge r_0(r_0>0)$ 上的连续非减函数并且 $\rho(r)\to\infty\ (r\to\infty)$.

(2) 函数 $U(r)=r^{\rho(r)}\ (r\ge r_0)$ 满足

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log U(R)}{\log U(r)}=1,\quad R=r+\frac{r}{\log U(r)}.$$

(3) $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log T(r,\ f)}{\rho(r)\log r}=1$.

定义 10[5] 射线 $J:\arg z=\theta$ 称为 $f(z)$ 的一条 $\rho(r)$ 级 *Borel* 方向,如果

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta,\varepsilon,\ f=a)}{\rho(r)\log r}=1,$$

对任意的 $\varepsilon>0$ 和任意的复数 $a\in C_\infty$ 成立,最多除去两个例外的 a 值.其中 $n(r,\theta,\varepsilon,$

$f=a)$ 表示 $f(z)$ 在扇形域 $\Omega(\theta,\varepsilon,r)=\{z:\theta-\varepsilon\le\arg z\le\theta+\varepsilon,|z|\le r\}$ 内 a 值点的个数,其重级 a 值点按重数计算.

1.2.2 角域内的 *Nevanlinna* 特征及增长级

本文中,我们还需要用到角域内的特征函数的性质,详细内容参见[6],[7].设 $0\le\alpha<\beta<2\pi$,引入记号,

$$\Omega(\alpha,\beta)=\{z:\alpha<\arg z<\beta\};$$

$$\Omega(\alpha,\beta,r)=\{z:\alpha<\arg z<\beta,|z|<r\};$$

$$\overline{\Omega}(\alpha,\beta,r)=\{z:\alpha\le\arg z\le\beta,|z|\le r\}.$$

定义 11[6] 假设 $f(z)$是角域$\Omega(\alpha,\beta)$上的亚纯函数,令 $k=\dfrac{\pi}{\beta-\alpha}$,当$r>1$时,

$$A_{\alpha,\beta}(r,f)=\frac{k}{\pi}\int^{r}\left(\frac{1}{t^k}-\frac{t^k}{r^{2k}}\right)\left\{\log^+\left|f\left(te^{i\alpha}\right)\right|+\log^+\left|f\left(te^{i\beta}\right)\right|\right\}\frac{dt}{t},$$

$$B_{\alpha,\beta}(r,f)=\frac{2k}{\pi r^k}\int_\alpha^\beta\log^+\left|f\left(re^{i\alpha}\right)\right|\sin k(\theta-\alpha)\,d\theta,$$

$$C_{\alpha,\beta}(r,f)=2\sum_{b_v\in\Omega}\left(\frac{1}{|b_v|^k}-\frac{|b_v|^k}{r^{2k}}\right)\sin k(\beta_v-\alpha),$$

其中和式$\sum_{b_v\in\Omega}$是对 $f(z)$在扇形区域$\Omega(\alpha,\beta,r)$内的所有极点 $b_v=|b_v|e^{i\theta}$ 求和,重级极点按重数计算.若重级极点只计一次,则记为$\overline{C}_{\alpha,\beta}(r,f)$.对于任意的$a\in C$,记

$$C_{\alpha,\beta}(r,a)=C_{\alpha,\beta}\left(r,\frac{1}{f-a}\right),\qquad C_{\alpha,\beta}(r,\infty)=C_{\alpha,\beta}(r,f).$$

进一步定义

$$D_{\alpha,\beta}(r,f)=A_{\alpha,\beta}(r,f)+B_{\alpha,\beta}(r,f),\qquad S_{\alpha,\beta}(r,f)=C_{\alpha,\beta}(r,f)+D_{\alpha,\beta}(r,f).$$

为了简单,将 $A_{\alpha,\beta}(r,f)$, $B_{\alpha,\beta}(r,f)$, $C_{\alpha,\beta}(r,f)$, $D_{\alpha,\beta}(r,f)$, $S_{\alpha,\beta}(r,f)$分别记为 $A(r,f)$, $B(r,f)$, $C(r,f)$, $D(r,f)$, $S(r,f)$.

定义 12[7] 设 $f(z)$是定义在$|z|\le R(0<r<R<\infty)$上的亚纯函数,则它在角域

$\Omega(\alpha,\beta)$上的级和下级分别定义为

$$\rho_{\alpha\beta}(f)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log^{+}S_{\alpha\beta}(r,f)}{\log r},\mu_{\alpha\beta}(f)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{\log^{+}S_{\alpha\beta}(r,f)}{\log r}.$$

定义 13[7] 设$0\le\alpha<\beta<2\pi$,则亚纯函数 $f(z)$在角域$\Omega(\alpha,\beta)$上的a值点收敛指数定义为

$$\lambda\Big(\Omega\big((\alpha,\beta),r\big),\ f=a\Big)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n\Big(\Omega\big((\alpha,\beta),r\big),\ f=a\Big)}{\log r},$$

其中$n\Big(\Omega\big((\alpha,\beta),r\big),\ f=a\Big)$为函数 $f(z)-a$在扇形域$\Omega\big((\alpha,\beta),r\big)$上的零点个数.

对任意给定的$\varepsilon>0$, $f(z)$在角域$\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon)$上的零点收敛指数定义为

$$\lambda_{\theta,\varepsilon}(f=a)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n\Big(\Omega\big((\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon),r\big),\ f=a\Big)}{\log r},$$

且$\lambda_{\theta}(f)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lambda_{\theta,\varepsilon}(f)$为 f沿径向$\arg=\theta$的零点收敛指数.

第二章　复振荡中的辐角分布

2.1　引言与结果

1982 年, *Bank* 和 *Laine* 在[1]中首次应用亚纯函数的 *Nevanlinna* 理论研究了二阶微分方程

$$f'' + A(z) f = 0 \tag{2.1}$$

的解的增长级和零点收敛指数,其中 $A(z)$ 为多项式或超越整函数.后来,关于微分方程解的振荡性质的研究受到国内外很多学者的关注,并取得了一系列重要的结果[8-11].2004 年,伍胜健[12]首次从辐角分布的角度研究了二阶微分方程解的零点聚值线和 *Borel* 方向之间的关系,证明了,

定理 2.1.A[12]　设 $A(z)$ 是一个级为 $\sigma(A)<\infty$ 的超越整函数, f_1, f_2 是方程 (2.1) 的两个线性无关解,记 $E= f_1 f_2$,再设 E 的零点收敛指数 $\lambda(E)=\infty$,则射线 $\arg z=\theta$ 是 E 的一条 ∞ 级 *Borel* 方向的充分必要条件是 $\lambda_\theta(E)=\infty$, 其中

$$\lambda_\theta(E)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_{\theta,\varepsilon}(E), \qquad \lambda_{\theta,\varepsilon}(E)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log n(r,\theta,\varepsilon,E=0)}{\log r}.$$

吴昭君,孙道椿将定理 2.1.A中的 ∞ 级 *Borel* 方向换成熊庆来无限级,证明了下面的结果.

定理 2.1.B[13]　设 $A(z)$ 是一个级为 $\sigma(A)<\infty$ 的超越整函数, f_1, f_2 是方程 (2.1) 的两个线性无关解,记 $E= f_1 f_2$,再设 $\lambda(E)=\infty$, $\rho(r)$ 是 E 的一个无限级,则射线 J: $\arg z=\theta$ 是 E 的一条 $\rho(r)$ 级 *Borel* 方向的充分必要条件是

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta,\varepsilon,E=0)}{\rho(r)\log r}=1.$$

伍胜健在文[12]中研究超越整函数系数微分方程的解的零点聚值线和 *Borel*

方向之间的关系时,运用了圆域上函数的最大模这样一个工具,而在讨论亚纯函数的相关问题时,最大模的工具不适用了,从而关于亚纯函数系数二阶微分方程解的零点聚值线和 *Borel* 方向的关系的相关结果较少.田宏根,吴昭君[14]则利用角域上的特征函数等工具研究了超越亚纯函数系数的二阶微分方程(2.1)的解的零点聚值线和 *Borel* 方向的关系,证明了如下定理 2.1.C.

定理 2.1.C[14]　设 $A(z)$是超越亚纯函数,其级为$\sigma(A(z))<\infty$.假设 f_1, f_2 为方程(2.1)两个线性无关的亚纯解.令 $E=f_1f_2$,如果$\sigma(E)=\infty$,则射线$\arg z=\theta$是 E 的一条∞级 *Borel* 方向的充分必要条件是$\lambda_\theta(E)=\infty$.

此定理的条件显然比定理 2.1.A更为宽松,受定理 2.1.B和定理 2.1.C的启发,本章将定理 2.1.C中的∞级换成熊庆来的无限级,将定理 2.1.B中的整函数推广到亚纯函数,证明了如下的定理.

定理 2.1　设 $A(z)$是超越亚纯函数,其级为$\sigma(A(z))<\infty$.假设 f_1, f_2 为方程(2.1)两个线性无关的亚纯解.令 $E=f_1f_2$,再设$\sigma(E)=\infty$,而$\rho(r)$是 E 的一个熊庆来无限级,则射线$J:\arg z=\theta$是 E 的一条$\rho(r)$级 *Borel* 方向的充分必要条件是

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta,\varepsilon,E=0)}{\rho(r)\log r}=1.$$

2.2 引理

引理 2.2.1　设 $f(z)$是复平面上的亚纯函数,$\Omega(\alpha,\beta)$ $(0<\beta-\alpha\le 2\pi)$为角域,则

(i)[6] 对于任意的$a\in C$,有

$$S\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=S(r,f)+O(1),$$

其中$r>1$.

(ii)[6] 对于任意的$r<R$,有

$$A\left(r,\frac{f'}{f}\right)\le K\left\{\left(\frac{R}{r}\right)^k\int^R\frac{\log T(t,f)}{t^{1+k}}dt+\log\frac{r}{R-r}+\log\frac{R}{r}+1\right\},$$

$$B\left(r,\frac{f'}{f}\right)\le\frac{4k}{r^k}m\left(r,\frac{f'}{f}\right).$$

其中 $k=\dfrac{\pi}{\beta-\alpha}$, K 是仅依赖于 r 和 R 的正常数.

(iii)[15] 对于任意 q 个不同的复数 $a_j\in C_\infty$, $j=1,2,\cdots q$, 有

$$(q-2)S(r,f)<\sum_{j=1}^{q}C(r,a_j)+h(r),$$

其中

$$h(r)=D\left(r,\frac{f'}{f}\right)+\sum_{1\le j\le q,a_j\ne\infty}D\left(r,\frac{f'}{f-a_j}\right)+O(1).$$

Valiron 曾证明了其中的 $h(r)$ 满足 $h(r)=O(\log U(r))$(见参考文献[6]),因此,我们有

$$(q-2)S(r,f)<\sum_{j=1}^{q}\overline{C}(r,a_j)+O(\log U(r)).\tag{2.2}$$

对于无限级亚纯函数的 *Borel* 方向,庄圻泰证明了如下定理.

引理 2.2.2[4] 设 $f(z)$ 是复平面上的无限级亚纯函数, $\rho(r)$ 是 $f(z)$ 的一个熊庆来无穷级,射线 $L:\arg z=\theta_0$ 是函数 $f(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 *Borel* 方向的充分必要条件是:对于任意 $\eta\left(0<\eta<\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S_{\theta-\eta,\theta+\eta}(r,f)}{\rho(r)\log r}=1.$$

引理 2.2.3 对任意充分小的 $0<\eta<\dfrac{\pi}{2}$,如果

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S_{\theta-\eta,\theta+\eta}(r,E)}{\rho(r)\log r}<1,$$

则

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n\left(r,\theta,\frac{\eta}{3},E=0\right)}{\rho(r)\log r}<1.$$

证明 假设结论不成立,则存在充分小的$0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$,使得

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n\left(r,\theta,\frac{\varepsilon}{3},E=0\right)}{\rho(r)\log r}=1,\qquad \varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,E)}{\rho(r)\log r}<1.$$

由定义 9,有

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n\left(r,\theta,\frac{\varepsilon}{3},E=0\right)}{\log U(R)}=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n\left(r,\theta,\frac{\varepsilon}{3},E=0\right)}{\log U(r)}\frac{\log U(r)}{\log U(R)}$$

$$\geq\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log n\left(r,\theta,\frac{\varepsilon}{3},E=0\right)}{\log U(r)}\varliminf_{r\to\infty}\frac{\log U(r)}{\log U(R)}=1.$$

则对任意的$0<\tau<1-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,E)}{\rho(r)\log r}$,存在$\{R_n\}$,$R_n=r_n+\frac{r_n}{\log U(r_n)}\to\infty$ $(n\to\infty)$并满足

$$n(r_n)=n\left(r_n,\theta,\frac{\varepsilon}{3},E=0\right)\geq(U(R_n))^{1-\tau}.$$

假设$b_v=|b_v|e^{i\beta_v}$ $(v=1,2,\cdots)$是$E=0$在$\Omega\left(\theta-\frac{\varepsilon}{3},\theta+\frac{\varepsilon}{3}\right)$内的根,重根计重数,由于$\theta-\frac{\varepsilon}{3}<\beta_v<\theta+\frac{\varepsilon}{3}$, $v=1,2,\cdots$.则$\frac{\varepsilon}{6}<\beta_V-\theta+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{5\varepsilon}{6}$,从而$\sin\frac{\pi}{\varepsilon}(\beta_V-\theta+\frac{\varepsilon}{2})>\frac{1}{2}$.
由关于$S(r,f)$的第一基本定理,有

$$S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(R_n,E)\geq C_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(R_n,a)+O(1)\geq C_{\theta-\frac{\varepsilon}{2},\theta+\frac{\varepsilon}{2}}(R_n,a)+O(1)$$

$$\geq 2\sum_{\substack{1<|b_v|<r_n\\ \theta-\frac{\varepsilon}{2}<\beta_v<\theta+\frac{\varepsilon}{2}}}\left(\frac{1}{|b_v|^k}-\frac{|b_v|^k}{(R_n)^{2k}}\right)\sin\frac{\pi}{\varepsilon}\left(\beta_v-\theta+\frac{\varepsilon}{2}\right)+O(1)$$

$$\geq 2\sum_{\substack{1<|b_v|<r_n\\ \theta-\frac{\varepsilon}{3}<\beta_v<\theta+\frac{\varepsilon}{3}}}\left(\frac{1}{|b_v|^k}-\frac{|b_v|^k}{(R_n)^{2k}}\right)\sin\frac{\pi}{\varepsilon}\left(\beta_v-\theta+\frac{\varepsilon}{2}\right)+O(1)$$

$$\geq \sum_{\substack{1<|b_v|<r_n \\ \theta-\frac{\varepsilon}{3}<\beta_v<\theta+\frac{\varepsilon}{3}}} \left(\frac{1}{|b_v|^k} - \frac{|b_v|^k}{(R_n)^{2k}} \right) + O(1),$$

其中 $k=\frac{\pi}{\varepsilon}$.将上式中的和式用 *Stieltjes*积分表示,并进行分部积分可得

$$S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(R_n,E) \geq \int^{r_n} \frac{1}{t^k} dn(t) - \frac{1}{R_n^{2k}} \int^{r_n} t^k dn(t) + O(1)$$

$$\geq k\int^{r_n} \frac{n(t)}{t^{k+1}} dt + \frac{n(r_n)}{r_n^k} - \frac{r_n^k n(r_n)}{R_n^{2k}} + \frac{k}{R_n^{2k}} \int^{r_n} n(t) t^{k-1} dt + O(1)$$

$$\geq \frac{n(r_n)}{r_n^k} - \frac{r_n^k n(r_n)}{R_n^{2k}} + O(1) \geq \left(\frac{1}{r_n^k} - \frac{1}{R_n^k} \right) n(r_n) + O(1),$$

于是

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,E)}{\rho(r)\log r} \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(R_n,E)}{\rho(R_n)\log R_n}$$

$$\geq \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log\left(\frac{1}{r_n^k} - \frac{1}{R_n^k} \right)}{\rho(R_n)\log R_n} + \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log n(r_n)}{\rho(R_n)\log R_n}$$

$$\geq 1-\tau + \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log\left(R_n^k - r_n^k\right) - k(\log R_n + \log r_n)}{\rho(R_n)\log R_n}$$

$$= 1-\tau.$$

这与 τ 的假设矛盾,即引理 2.2.3 得证.

引理 2.2.4[16]　假设 $f(z)=\frac{g(z)}{d(z)}$ 为无穷级亚纯函数,其超级 $\sigma_2(f)=\sigma$,其中 $g(z)$ 和 $d(z)$ 是整函数,且满足 $\sigma(d)<\infty$.又设 $A(z)$ 为亚纯函数,满足 $\sigma(A)=\beta<\infty$. 则对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在一列 $\{r_k\}$ 趋于无穷使得对于满足 $|z|=r_k$ 和 $|g(z)|=M(r_k,g)$ 的 z,当 k 充分大有

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r_k)}{z} \right)^n (1+o(1)), \qquad n\geq 1,$$

$$\sigma_2(f) = \lim_{k\to\infty} \frac{\log\log \nu_g(r_k)}{\log r_k},$$

$$\exp\{-r^{\beta+\varepsilon}\}\le|A(z)|\le\exp\{r^{\beta+\varepsilon}\}.$$

引理2.2.5　设 $A(z)$ 是超越亚纯函数,其级为 $\sigma(A(z))<\infty$,则方程 (2.1) 的任意非零亚纯解的超级 $\sigma_2(f)\le\sigma(A(z))$.

证明　假设 $f(z)$ 为方程 (2.1) 的非零亚纯解,我们将 (2.1) 改写为

$$-A(z)=\frac{f''(z)}{f(z)}. \tag{2.3}$$

因为 f 的极点只能产生于 A 的极点,所以 $\lambda\left(\frac{1}{f}\right)\le\sigma(A)$. 利用 *Hadamard* 分解定理,可将 f 表为 $f(z)=\frac{g(z)}{d(z)}$,其中 $g(z)$ 和 $d(z)$ 都是整函数,且 $d(z)$ 的零点是 $f(z)$ 的极点,从而 $\lambda(d)=\sigma(d)=\lambda\left(\frac{1}{f}\right)\le\sigma(A)$.再由引理2.2.4知,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在一列趋于无穷的 $\{r_k\}$,使得对满足 $|z|=r_k$ 和 $|g(z)|=M(r_k,g)$ 的 z 有

$$\frac{f^{('')}(z)}{f(z)}=\left(\frac{\nu_g(r_k)}{z}\right)^2(1+o(1)),$$

$$\sigma_2(f)=\lim_{k\to\infty}\frac{\log\log\nu_g(r_k)}{\log r_k},$$

$$\exp\{-r^{\sigma(A)+\varepsilon}\}\le|A(z)|\le\exp\{r^{\sigma(A)+\varepsilon}\}.$$

结合 (2.3) 式可得

$$\nu_g^2(r_k)(1+o(1))\le r_k^2\exp\{r_k^{\sigma(A)+\varepsilon}\}.$$

由于 ε 是任意的,对上式两边同时取 2 次对数再除以 $\log r_k$,当 k 充分大时,即 $\sigma_2(f)\le\sigma(A(z))$.

2.3　定理的证明

由引理2.2.2,如果能证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta,\varepsilon,E=0)}{\rho(r)\log r}=1$$

的充分必要条件是对任意的$\varepsilon>0$,

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,E)}{\rho(r)\log r}=1$$

成立,则定理2.1得证.

下面证明这一结论.

必要性.由引理2.2.3,对任意的$0<\varepsilon<\frac{\eta}{3}$,由

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta,\varepsilon,E=0)}{\rho(r)\log r}=1,$$

必有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,E)}{\rho(r)\log r}\geq 1. \tag{2.4}$$

另一方面由不等式

$$\overline{C}_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,a)\leq 2n(r,\theta,\varepsilon,E=a),$$

和

$$n(r,\theta,\varepsilon,E=a)\leq n(r,E=a)\leq N(R,E=a)\left(\log\frac{R}{r}\right)^{-1}\leq T(R,E=a)\left(\log\frac{R}{r}\right)^{-1},$$

其中$R=r+\frac{r}{\log U(r)}$,$U(r)=r^{\rho(r)}$,$r>1$是任意的.以及$\rho(r)$是E的一个熊庆来级,

可知对任意的$\varepsilon>0$,当r充分大时,有

$$T(R,E=a)\leq\left(U(R)\right)^{1+\varepsilon},$$

这样便有

$$\overline{C}_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,a)\leq 2n(r,\theta,\varepsilon,E=a)<2\left(\log\frac{R}{r}\right)^{-1}\left(U(R)\right)^{1+\varepsilon},$$

再结合(2.2)式,并取$q=3$得

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,E)}{\rho(r)\log r}\le\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\left[\overline{C}_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,a)+o\left(\log\left(U(r)\right)\right)\right]}{\rho(r)\log r}\le 1.$$

结合(2.4)可知

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,E)}{\rho(r)\log r}=1.$$

综上所述必要性得证.

充分性. 由引理2.2.5知道方程(2.1)的任意非零亚纯解满足$\sigma_2(f)\le\sigma(A(z))$,

因此$\sigma_2(f_i)\le\sigma(A(z)), i=1,2$.对任意的$\theta\in(0,2\pi]$和充分小的$\varepsilon>0$ $\left(\varepsilon\text{满足}\sigma(\mathrm{A})-\right.$

$\left.\frac{\pi}{2\varepsilon}<1\right)$.令$R=2r$,由引理2.2.1(ii)有

$$A\left(r,\frac{f_i'}{f_i}\right)\le O\left(\int_1^{2r}\frac{\log^+T(t,f)}{t^{1+\frac{\pi}{2\varepsilon}}}dt\right)=O\left(\int_1^{2r}\frac{t^{\sigma(A)+1}}{t^{1+\frac{\pi}{2\varepsilon}}}dt\right)=O(1), i=1,2.$$

根据对数导数引理

$$m\left(r,\frac{f_i'}{f_i}\right)=O\left(\log^+T(r,f_i)+\log r\right)=O\left(r^{\sigma(A)+1}\right), i=1,2.$$

结合引理2.2.1和上式得

$$B\left(r,\frac{f_i'}{f_i}\right)=O\left(r^{\sigma(A)+1-\frac{\pi}{2\varepsilon}}\right)=O(1), i=1,2.$$

因此

$$D\left(r,\frac{f_i'}{f_i}\right)=O(1), i=1,2.$$

另一方面,由[8]我们知道 f_1和 f_2的*Wronsky*行列式W是一个非零常数,记其为$c\ne0$.又

$$\frac{1}{E}=\frac{W}{E}\frac{1}{c}=\frac{1}{c}\frac{f_2'}{f_2}-\frac{1}{c}\frac{f_1'}{f_1},$$

所以

$$D\left(r,\frac{1}{E}\right)=O(1).$$

再对于任意的$\theta\in(0,2\pi]$和充分小的$\varepsilon>0$,在角域$\{z:\theta-\varepsilon\le\arg z\le\theta+\varepsilon\}$内,满足

$$S(r,E)=C\left(r,\frac{1}{E}\right)+O(1).$$

所以如果

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,E)}{\rho(r)\log r}=1,$$

便有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log C_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}\left(r,\frac{1}{E}\right)}{\rho(r)\log r}=1.$$

又因为

$$C_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}\left(r,\frac{1}{E}\right)\le 2n(r,\theta,\varepsilon,E=0),$$

因此

$$\lim_{\varepsilon\to0}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta,\varepsilon,E=0)}{\rho(r)\log r}\ge1,$$

再由

$$\lim_{\varepsilon\to0}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta,\varepsilon,E=0)}{\rho(r)\log r}\le\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,E)}{\rho(r)\log r}=1,$$

得到

$$\lim_{\varepsilon\to0}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta,\varepsilon,E=0)}{\rho(r)\log r}=1.$$

所以充分性成立.

第三章　一类高阶亚纯系数线性微分方程解的增长性

3.1　引言与结果

关于二阶线性微分方程

$$f'' + A(z)f' + B(z)f = 0. \tag{3.1}$$

众所周知,当 $A(z), B(z)$ 是整函数时,方程 (3.1) 的解都是整函数,并且如果 $B(z)$ 是超越的,而 f_1 和 f_2 是方程 (3.1) 的两个线性无关解,那么 f_1 和 f_2 中至少有一个是无穷级.自然会问,当 $A(z), B(z)$ 满足什么条件时,会使得 (3.1) 的任一非零解都是无穷级呢? *G.Gundersen, S.Hellerstein, J.Miles* 和 *J.Rossi* 在文献[17,18]中证明了:若 $A(z)$ 和 $B(z)$ 是整函数并满足 $\rho(A) < \rho(B)$,或者 $A(z)$ 是多项式, $B(z)$ 是超越的,或者 $\rho(B) < \rho(A) \le 1/2$,则方程 (3.1) 的任一非零解均为无穷级. 2011 年伍鹏程,朱军在文献[19]中,考虑系数函数有亏值的情况下进一步研究了相关问题,证明了下面两个定理.

定理 3.1.*A*　假设 $A(z)$ 是有限级整函数,具有有限亏值, $B(z)$ 是不恒为零的整函数,若存在两个常数 $\alpha > 0, \beta > 0$, 和对任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在两个有限实数集 $\{\phi_k\}$ 和 $\{\theta_k\}$ 满足

$$\phi_1 < \theta_1 < \phi_2 < \theta_2 < \cdots < \phi_m < \theta_m < \phi_{m+1}, (\phi_{m+1} = \phi_1 + 2\pi),$$

及

$$\sum_{k=1}^{m} (\phi_{k+1} - \theta_k) < \varepsilon.$$

使得当 $\phi_k \le \arg z \le \theta_k, (k = 1,2,\cdots,m), z \to \infty$ 时有 $|B(z)| \ge \exp\{(1 + o(1))\alpha |z|^{\beta}\}$, 则方程 (3.1) 的每一个非零解的级为无穷.

定理 3.1.*B*　假设 $A(z)$ 是有限级整函数,具有有限亏值, $B(z)$ 是不恒为零的整

函数,若对任意的 $k>0$ 时,有

$$\lim_{|z|=r\to\infty}\frac{|B(z)|}{r^k}=\infty,\quad (r\notin G)$$

其中集合 G 的对数测度有限,则方程 (3.1) 的每个非零解的级为无穷.

石磊,易才凤在文[10]中讨论了更为一般的高阶线性微分方程

$$f^{(n)}+A_{n-1}(z)f^{(n-1)}+\cdots+A_1(z)f'+A_0(z)f=0 \tag{3.2}$$

解的增长性,证明了定理3.1.C.

定理3.1.C　假设 $A_i(z)(i=0,1,\cdots,n-1)$ 是整函数,存在某个 $s(1\le s\le n-1)$,满足

(i) A_s 具有有限亏值,$\rho(A_s)<\infty$,对于 $i\neq 0$和s, A_i 为多项式;

(ii)假设存在常数 $\alpha>0,\beta>0$, 对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在两个有限集合 $\{\phi_k\}$ 和 $\{\theta_k\}$,满足 $\phi_1<\theta_1<\phi_2<\theta_2<\cdots<\phi_m<\theta_m<\phi_{m+1}(\phi_{m+1}=\phi_1+2\pi)$ 及 $\sum_{k=1}^{m}(\phi_{k+1}-\theta_k)<\varepsilon$, 使得在角域 $\phi_k\le\arg z\le\theta_k(k=1,2,\cdots,m)$ 内,当 $|z|\to\infty$ 时,有

$$|A_0(z)|\ge\exp\{(1+o(1))\alpha|z|^{\beta}\}$$

则方程 (3.2) 的每一个非零解的级为无穷.

杨碧珑,易才凤在文[20]研究了方程 (3.2) 中的系数可以是具有有限个极点的亚纯函数,且 $A_0(z)$ 以 ∞ 为亏值时解的增长性,证明了定理3.1.D.

定理 3.1.D　假设 $A_i(z)(i=1,2,\cdots,n-1)$ 均为仅有有限个极点的亚纯函数, $A_0(z)$ 为以无穷为亏值的超越亚纯函数,若 $\rho(A_i)<\rho(A_0)(i=1,2,\cdots,n-1)$,则方程 (3.2) 的每个非零解的级为无穷.

本文将定理3.1.C中的整系数推广到亚纯系数,将 $A_s(z)$ 具有有限亏值改为 $A_0(z)$ 以 ∞ 为亏值.证明了方程的非零解有无穷级,并对超级进行了估计.本文还对定理3.1.D中的条件进行了放宽,证明了相同的结论,其主要结果如下.

定理3.1.1　假设 $A_i(z)(i=1,2,\cdots,n-1)$ 是亚纯函数, $A_0(z)$ 是以无穷为亏值的超

越亚纯函数,并且 $A_0(z)$ 的级 $0<\rho(A_0)<\infty$.若存在常数 $\alpha>0,\beta>0$, 和对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在两个有限实数集 $\{\phi_k\}$ 和 $\{\theta_k\}$ 满足

$$\phi_1<\theta_1<\phi_2<\theta_2<\cdots<\phi_m<\theta_m<\phi_{m+1},(\phi_{m+1}=\phi_1+2\pi),$$

及

$$\sum_{k=1}^{m}(\phi_{k+1}-\theta_k)<\varepsilon,$$

使得在角域 $\phi_k\le\arg z\le\theta_k(k=1,2,\cdots,m)$ 内,且 $|z|\to\infty$ 时有 $|A_i(z)|\le(1+o(1))\alpha|z|^{\beta}$, $(i=1,2,\cdots,n-1)$.则方程 (3.2) 的每一个非零解的级为无穷,进一步 $\rho_2(f)\ge\rho(A_0)$.

定理 3.1.2　假设 $A_i(z)(i=1,2,\cdots,n-1)$ 是亚纯函数, $A_0(z)$ 是以无穷为亏值的超越亚纯函数,若 $\rho(A_i)<\rho(A_0)<\infty(i=1,2,\cdots,n-1)$,则方程 (3.2) 的每个非零解的级为无穷.

定理 3.1.3　假设 $A_i(z)(i=0,1,\cdots,n-1)$ 满足定理 3.1.2 的条件, $F(\not\equiv0)$ 是有限级亚纯函数,则方程

$$f^{(n)}+A_{n-1}(z)f^{(n-1)}+\cdots+A_1(z)f'+A_0(z)f=F \tag{3.3}$$

至多有一个可能的有限级例外解 f_0,其它所有解 f 满足

$$\bar{\lambda}(f)=\lambda(f)=\rho(f)=\infty.$$

3.2 引理

引理 3.2.1[21]　设 $f(z)$ 是开平面上的超越亚纯函数, $\Gamma=\{(k_1,j_1),(k_2,j_2),\cdots,(k_q,j_q)\}$ 是由不同整数对组成的有限集合,满足 $k_i>j_i\ge0,(i=1,2,\cdots,q)$, $\alpha>1$ 是给定的实常数,则存在零测度集 $E_1\subset[0,2\pi)$ 和仅依赖于 α 和 Γ 的常数 $C>0$,使得当 $\varphi_0\in[0,2\pi)\setminus E_1$ 时,存在常数 $R_0=R_0(\varphi_0)>1$,对满足 $\arg z=\varphi_0$ 及 $|z|=r\ge R_0$ 的所有的 z 及对所有 $(k,j)\in\Gamma$,都有

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \le C\left(\frac{T(\alpha r, f)}{r}\log^{\alpha} r\log T(\alpha r, f)\right)^{k-j}, \tag{3.4}$$

特别地,当 $f(z)$的级 $\rho(f)=\rho<\infty$时,假设 $\varepsilon>0$是任意给定的常数,则(3.4)式可以由(3.5)式代替,

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \le |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}. \tag{3.5}$$

引理3.2.2[2] 设函数 $f(z)$于开平面亚纯,级 ρ为有穷正数,并设 $a_\nu(\nu=1,2,\cdots,p,$ $1\le p<\infty)$为一组互相判别的复数,且 $\delta(a_\nu, f)=\delta_\nu>0(\nu=1,2,\cdots,p)$.若 $\rho(r)$为 $f(z)$的一精确级,令 $U(r)=r^{\rho(r)}$以及记 $\delta=\min\limits_{1\le\nu\le p}\delta_\nu$,则必存在一列正数 $R_j(j=1,2,\cdots)$, $\lim\limits_{j\to\infty}R_j=\infty$,对于每个充分大的 j和 $\nu=1,2,\cdots,p$使

$$\begin{cases}\log\dfrac{1}{\left|f\left(R_je^{i\phi}\right)-a_\nu\right|}>\dfrac{\delta}{2^{\rho+4}}U\left(R_j\right), & \text{当}a_\nu\ne\infty\text{时},\\ \log\left|f\left(R_je^{i\phi}\right)\right|>\dfrac{\delta}{2^{\rho+4}}U\left(R_j\right), & \text{当}a_\nu=\infty\text{时},\end{cases}$$

成立的值 $\varphi(0\le\varphi<2\pi)$ 构成的集 $E_{j\nu}$ 的测度 $mesE_{j\nu}>K(\delta, p,\rho)>0$, 其中 $K(\delta, p,\rho)$表示仅依赖于 δ, p,ρ 的正数.

引理3.2.3[22] 假设 $f(z)$是超越亚纯函数且 $\rho(f)=\beta<+\infty$,那么对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在线测度为零的子集 $E\subset[0,2\pi)$,当 $\psi\in[0,2\pi)\setminus E$时,存在常数 $R=R(\psi)>1$,使得对所有满足 $\arg z=\psi$和 $|z|=r\ge R$的 z 有

$$\exp\left\{-r^{\beta+\varepsilon}\right\}\le|f(z)|\le\exp\left\{r^{\beta+\varepsilon}\right\}.$$

引理3.2.4[23] 设 $A_i(z)(i=0,1,\cdots,n-1)$, $F(\ne0)$是有限级亚纯函数.若 f为方程(3.3)的无穷级亚纯函数解,则 f满足 $\bar{\lambda}(f)=\lambda(f)=\rho(f)=\infty$.

3.3 定理的证明

3.3.1 定理3.1.1的证明

假设 f 为方程(3.2)的非零解,且 $\rho(f)<\infty$.记 $\delta=\delta(\infty, A_0)$,由方程(3.2)可以得到

$$|A_0(z)| \le \left|\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)}\right| + \sum_{i=1}^{n-1}|A_i(z)|\left|\frac{f^{(i)}(z)}{f(z)}\right|. \tag{3.6}$$

由引理3.2.1,存在一个零测度集 $E_1\subset[0,2\pi)$,使得对满足 $\arg z=\varphi_0\in[0,2\pi)\setminus E_1$ 和 $|z|=r\ge R_0(\varphi_0)>1$ 的所有的 z 都有

$$\left|\frac{f^{(i)}}{f}\right| \le |z|^{n\rho(f)}, (i=1,2,\cdots,n) \tag{3.7}$$

对 $A_0(z)$ 应用引理3.2.2知,存在一序列 $\{R_j\}$, $\lim\limits_{j\to\infty}R_j=\infty$,当 j 充分大时,有

$$m(F_j)=m\left(\left\{\theta\in[0,2\pi)\Big|\log\left|A_0\left(R_je^{i\theta}\right)\right|\ge\frac{\delta}{2^{\rho(A_0)+4}}U(R_j)\right\}\right)>K>0, \tag{3.8}$$

其中 K 是只与 $\delta,\rho(A_0)$ 有关的正数, $U(r)=r^{\rho(r)}$.

取 $\varepsilon<K/2$,则存在 $\varphi_j\in(F_j-E_1)\cap\left(\bigcup\limits_{k}^{m}[\phi_k,\theta_k]\right)$,并且有 $m(F_j-E_1)=m(F_j)>K>0$.当 j 充分大时,由第一章精确级的定义 8 知, $U(R_j)=R_j^{\rho(R_j)}\ge T(R_j,A_0)$.因此有

$$\left|A_0\left(R_je^{i\varphi_j}\right)\right|\ge\exp\left\{\frac{\delta}{2^{\rho(A_0)+4}}T(R_j,A_0)\right\}, \tag{3.9}$$

及定理的条件有

$$|A_i(z)|\le(1+o(1))\alpha|z|^{\beta}, (i=1,2,\cdots,n-1). \tag{3.10}$$

将(3.7),(3.9),(3.10)式代入(3.6)式得到

$$\exp\left\{\frac{\delta}{2^{\rho(A_0)+4}}T(R_j,A_0)\right\}\le\left|A_0\left(R_je^{i\varphi_j}\right)\right|\le R_j^{n\rho(f)}\left[1+(n-1)(1+o(1))\alpha R_j^{\beta}\right], \tag{3.11}$$

对上式两边同时取对数再除以 $\log R_j$,然后取极限,有

$$\lim_{j\to\infty}\frac{T(R_j,A_0)}{\log R_j}\le M, \tag{3.12}$$

其中 $M=2^{\rho(A_0)+4}(n\rho(f)+\beta)/\delta$ 为常数.

这与 $A_0(z)$ 为超越亚纯函数矛盾,所以 $\rho(f)=\infty$.

下面证明 $\rho_2(f)\ge\rho(A_0)$.

由引理3.2.1,存在一个零测度集 $E_2\subset[0,2\pi)$,使得对满足 $\arg z=\varphi_0\in[0,2\pi)\setminus E_2$ 和 $|z|=r\ge R_0(\varphi_0)>1$ 的所有的 z 都有

$$\left|\frac{f^{(i)}(z)}{f(z)}\right|\le CT(2r,f)^{2n}(i=1,2,\cdots,n), \tag{3.13}$$

对 $A_0(z)$ 应用引理3.2.2知,存在一序列 $\{R_j\}$, $\lim\limits_{j\to\infty}R_j=\infty$,当 j 充分大时,有

$$m(F_j)=m\left(\left\{\theta\in[0,2\pi)\middle|\log\left|A_0\left(R_je^{i\theta}\right)\right|\ge\frac{\delta}{2^{\rho(A_0)+4}}U(R_j)\right\}\right)>K>0, \tag{3.14}$$

其中 K 是只与 $\delta,\rho(A_0)$ 有关的正数.

取 $\varepsilon<K/2$, 则存在 $\varphi_j\in(F_j-E_2)\cap\left(\bigcup\limits_k^m[\phi_k,\theta_k]\right)$,并且有 $m(F_j-E_2)=m(F_j)>K>0$.当 j 充分大时,有

$$\left|A_0\left(R_je^{i\phi_j}\right)\right|\ge\exp\left\{\frac{\delta}{2^{\rho(A_0)+4}}U(R_j)\right\}, \tag{3.15}$$

再由定理的条件有

$$|A_i(z)|\le(1+o(1))\alpha|z|^\beta,(i=1,2,\cdots,n-1) \tag{3.16}$$

将(3.13),(3.15),(3.16)式代入(3.6)式得到

$$\exp\left\{\frac{\delta}{2^{\rho(A_0)+4}}U(R_j)\right\}\le\left|A_0\left(R_je^{i\varphi_j}\right)\right|\le CT(2R_j,f)^{2n}\left[1+(n-1)(1+o(1))\alpha R_j^{\beta}\right], \tag{3.17}$$

对上式两边同时取 2 次对数再除以 $\log R_j$,当 j 充分大时,根据精确级的定义有

$$\rho(A_0)=\lim_{R_j\to\infty}\rho(R_j)=\lim_{R_j\to\infty}\frac{\log U(R_j)}{\log R_j}\le\lim_{R_j\to\infty}\frac{\log\log T(R_j,f)}{\log R_j}\le\rho_2(f).$$

定理3.1.1证毕.

3.3.2 定理3.1.2的证明

假设 f 为方程(3.2)的非零解,且 $\rho(f)<\infty$.记 $\delta=\delta(\infty,A_0)$,由方程(3.2)可以得

到

$$\left|A_0(z)\right| \le \left|\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)}\right| + \sum_{i=1}^{n-1}\left|A_i(z)\right|\left|\frac{f^{(i)}(z)}{f(z)}\right|. \tag{3.18}$$

由引理3.2.1,存在一个零测度集 $E_1 \subset [0,2\pi)$,使得对满足 $\arg z = \varphi_0 \in [0,2\pi)\setminus E_1$ 和 $|z| = r \ge R_0(\varphi_0) > 1$ 的所有的 z 都有

$$\left|\frac{f^{(i)}}{f}\right| \le |z|^{n\rho(f)}, (i=1,2,\cdots,n) \tag{3.19}$$

令 $\max\{\rho(A_1),\rho(A_2),\cdots,\rho(A_{n-1})\} = \rho_0 < \rho(A_0)$,若 $A_i(z)$ 为超越亚纯函数,应用引理3.2.3知,对任意给定的 $\varepsilon(0<\varepsilon<(\rho(A_0)-\rho_0)/2)$,存在零测度集 $E_2 \subset [0,2\pi)$ 使得对满足 $\arg z = \psi_0 \in [0,2\pi)\setminus E_1$ 和 $|z| = r \ge R_0(\psi_0) > 1$ 的所有的 z 都有

$$\left|A_i(z)\right| \le \exp\{r^{\rho(A_0)-\varepsilon}\}. \tag{3.20}$$

若 $A_i(z)$ 为有理函数,则 $A_i(z)$ 仅有有限个极点,则存在 R_1 和 $M>0$,当 $|z|>R_1$ 时有

$$\left|A_i(z)\right| < r^M \quad ,(i=1,2,\cdots,n-1) \tag{3.21}$$

对 $A_0(z)$ 应用引理3.2.2知,存在一序列 $\{R_j\}$, $\lim\limits_{j\to\infty} R_j = \infty$,当 j 充分大时,有

$$m(F_j) = m\left(\left\{\theta \in [0,2\pi) \,\Big|\, \log\left|A_0(R_j e^{i\theta})\right| \ge \frac{\delta}{2^{\rho(A_0)+4}}U(R_j)\right\}\right) > K > 0, \tag{3.22}$$

其中 K 是只与 $\delta, \rho(A_0)$ 有关的正数.

因为 $m(F_j - E_1 - E_2) = m(F_j) > K > 0$,则存在 $\varphi_j \in (F_j - E_1 - E_2)$,当 j 充分大时,有

$$\left|A_0\left(R_j e^{i\phi_j}\right)\right| \ge \exp\left\{\frac{\delta}{2^{\rho(A_0)+4}}U\left(R_j\right)\right\}, \tag{3.23}$$

将(3.19)−(3.21),(3.23)式代入(3.18)式得到

$$\exp\left\{\frac{\delta}{2^{\rho(A_0)+4}}U\left(R_j\right)\right\} \le \left|A_0\left(R_j e^{i\phi_j}\right)\right| \le R_j^{n\rho(f)}\left[1+(n-1)\exp\{R_j^{\rho(A_0)-\varepsilon}\}\right], \tag{3.24}$$

对上式两边同时取 2 次对数再除以 $\log R_j$,当 j 充分大时,根据精确级的定义有

$$\rho(A_0) < \rho(A_0) - \varepsilon,$$

矛盾,所以$\rho(f)=\infty$.定理3.1.2证毕.

3.3.3 定理3.1.3的证明

假设 f_0是方程(3.3)的有限级解,如果方程(3.3)还有另一个有限级解 $f^*(\neq f_0)$,那么$\rho(f^*-f_0)<\infty$,且 f^*-f_0为方程(3.3)所对应的齐次方程(3.2)的解,但由定理3.1.2知$\rho(f^*-f_0)=\infty$,矛盾.所以方程(3.3)至多有一个可能的有限级例外解 f_0.现假设 f为(3.3)的无穷级解,由定理的假设$\max\{\rho(F),\rho(A_0),\cdots,\rho(A_{n-1})\}<\infty=\rho(f)$.应用引理3.2.4有$\bar{\lambda}(f)=\lambda(f)=\rho(f)=\infty$.定理3.1.3证毕.

第四章　一类高阶整系数线性微分方程解的增长性

4.1　引言与结果

亚纯函数的亏值是模分布论中的一个重要概念,其定义仅与值点的模有关,与值点的辐角无关;亚纯函数的 *Borel* 方向则是辐角分布论中的重要概念.表面上看两者之间似乎没有联系,然而,杨乐,张广厚在 1975 年却证明了下面的结果.

定理 4.1.*A*[25]　设 $f(z)$ 于开平面亚纯,级 ρ 为有穷正数,若记 $f(z)$ 的亏值总数为 p, $f(z)$ 的 *Borel* 方向总数为 q.则 $p\le q$.

在 $f(z)$ 为整函数时,有下面更精确的估计.

定理 4.1.B[25]　设 $f(z)$ 是一个 $\rho(0<\rho<+\infty)$ 级整函数,若记 $f(z)$ 的有穷亏值总数为 p, $f(z)$ 的 *Borel* 方向总数为 q,则有 $p\le\frac{q}{2}$.

上述定理中的不等式"$p\le\frac{q}{2}$"称为杨—张不等式.若 $f(z)$ 满足 $p=\frac{q}{2}$,则称 $f(z)$ 满足杨—张不等式的极端情况.

2013年,龙见仁、伍鹏程和张政运用杨—张不等式的极端情形,研究了二阶线性微分方程

$$f''+A(z)f'+B(z)f=0 \tag{4.1}$$

解的增长性,证明了下面的结果.

定理 4.1.C[24]　假设 $A(z)$ 是满足杨—张不等式的极端情况 $p=\frac{q}{2}$ 的整函数, $B(z)$ 是超越整函数且 $\rho(A)\ne\rho(B)$,则方程 (4.1) 的每个非零解的级为无穷.

定理 4.1.D[24]　假设 $A(z)$ 是满足杨—张不等式的极端情况 $p_1=\frac{q_1}{2}$ 的整函数, $B(z)$ 也是满足杨—张不等式的极端情况 $p_2=\frac{q_2}{2}$ 的整函数,如果下面有一个成立.

（I） $q_1 \neq q_2$;

（II） $q_1 = q_2$, $A(z)$的 *Borel* 方向的集合不同于 $B(z)$的 *Borel* 方向的集合.

则方程(4.1)的每个非零解的级为无穷.

本文主要是从杨—张不等式的极端情况来研究高阶线性微分方程

$$f^{(n)} + A_{n-1}(z)f^{(n-1)} + \cdots + A_1(z)f' + A_0(z)f = 0 \tag{4.2}$$

解的增长性,证明了以下结论.

定理 4.1.1　假设 $A_i(z)(i = 0,1,\cdots,n-1)$是整函数,存在某个 $A_s(s \neq 0)$满足杨—张不等式极端情况 $p = \frac{q}{2}$,且 $\rho(A_s) \neq \rho(A_0) < \infty$.若下面（I）或者（II）成立,

（I） $\rho(A_0) \geq \frac{1}{2}$， $\rho(A_i) < \rho(A_0)(i \neq s)$;

（II） $\rho(A_0) < \frac{1}{2}$， A_i 为多项式$(i \neq s)$.

则方程(4.2)的每个非零解的级为无穷.

定理 4.1.2　假设 $A_i(z)(i = 0,1,\cdots,n-1)$为整函数,存在某个 $A_s(s \neq 0)$满足杨—张不等式极端情况 $p_1 = \frac{q_1}{2}$, $A_0(z)$也满足杨—张不等式极端情况 $p_2 = \frac{q_2}{2}$,且 $\rho(A_i) < \rho(A_0) < \infty$ $(i \neq s)$,若下面（I）或者（II）成立,

（I） $\rho(A_s) \neq \rho(A_0)$;

（II）当 $\rho(A_s) = \rho(A_0)$时.要么 $q_1 < q_2$;要么 $q_1 = q_2$, $A_0(z)$的 *Borel* 方向的集合不同于 $A_s(z)$的 *Borel* 方向的集合;要么 $q_1 > q_2$, $A_0(z)$的 *Borel* 方向的集合不是 $A_s(z)$的 *Borel* 方向的集合的子集.

则方程的(4.2)每个非零解的级为无穷.

4.2　引理

引理 4.2.1[21]　设 $f(z)$为复平面上的超越亚纯函数,其增长级 $\rho(f)$为有限正数,即 $0 < \rho(f) < \infty$,并假设 $\Gamma = \{(k_1, j_1),(k_2, j_2),\cdots,(k_m, j_m)\}$是由某些不同的整数对

组合而成的有限集合,且满足 $k_i > j_i \geq 0, i=1,\cdots,m$,又假设 $\varepsilon > 0$ 为任意给定的某个常数,则

（I）存在关于 ψ 的集合 $E_1 \subset [0,2\pi)$ 其测度 $mE_1 = 0$,使得当 $\psi_0 \in [0,2\pi) \setminus E_1$ 时,存在正常数 $R_0 = R_0(\psi_0) > 0$,当 z 满足 $\arg z = \psi_0$ 和 $|z| \geq R_0$ 以及所有的 $(k,j) \in \Gamma$,都有

$$\left| f^{(k)}(z) / f^{(j)}(z) \right| \leq |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}. \tag{4.3}$$

（II）存在关于 r 的集合 $E_2 \subset (1,\infty)$ 其对数测度 $m_l E_2 < +\infty$,使得当 z 满足 $|z| \notin E_2 \cup [0,1]$ 时,对所有 $(k,j) \in \Gamma$,都有 (4.3) 式成立.

（III）存在关于 r 的集合 $E_3 \subset (0,\infty)$ 其线测度 $mE_3 < +\infty$,使得当 z 满足 $|z| \notin E_3$ 时,对所有的 $(k,j) \in \Gamma$,都有

$$\left| f^{(k)}(z) / f^{(j)}(z) \right| \leq |z|^{(k-j)(\rho+\varepsilon)}. \tag{4.4}$$

引理 4.2.2[26]　假设 $A_i(z)(i=0,1,\cdots,n-1)$ 是整函数, $\rho(A_i) < \rho(A_0) < \infty (i \neq 0)$,则高阶微分方程 (4.2) 的每个非零解的级为无穷.

引理 4.2.3[27]　假设整函数 f 满足杨—张不等式的极端情况,则 $\mu(f) = \rho(f)$.进一步,再假设 $\arg z = \theta_j (j=1,2,\cdots,q)$ $(0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_q < \theta_{q+1} = \theta_1 + 2\pi)$ 是 f 的 q 个不同的 $\rho(f)$ 级 *Borel* 方向.那么对于 f 的每一个亏值 $a_i (i=1,\cdots,p)$,都存在一个相应的角域 $\Omega(\theta_j, \theta_{j+1}) = \{z : \theta_j < \arg z < \theta_{j+1}\}$, 使得对于每个 $\varepsilon > 0$ 和 $z \in \Omega(\theta_j + \varepsilon, \theta_{j+1} - \varepsilon, r, +\infty)$ 都有

$$\log \frac{1}{|f - a_i|} > C(\theta_j, \theta_{j+1}, \varepsilon, \delta(a_i, f)) T(|z|, f), \tag{4.5}$$

其中 $C(\theta_j, \theta_{j+1}, \varepsilon, \delta(a_i, f))$ 是仅取决于 $\theta_j, \theta_{j+1}, \varepsilon$ 和 $\delta(a_i, f)$ 的正常数.

引理 4.2.4[24]　假设 f 满足杨—张不等式的极端情况,并存在 $\theta \in \Omega(\theta_j, \theta_{j+1})$ $(1 \leq j \leq q)$,使得

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+\log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|}{\log r}=\rho(f) \tag{4.6}$$

则$\theta_{j+1}-\theta_j=\dfrac{\pi}{\rho(f)}$.

4.3 定理的证明

4.3.1 定理4.1.1的证明

若$\rho(A_s)<\rho(A_0)$,由引理4.2.2可知方程(4.2)的所有非零解的级为无穷.

下面考虑$\rho(A_s)>\rho(A_0)$.假设存在非零解且满足$\rho(f)<\infty$.设$a_i\,(i=1, 2,\cdots p)$是$A_s(z)$的所有有穷亏值,$\arg z=\theta_j\,(j=1,\cdots,2p)$是$A_s(z)$的$2p$条*Borel*方向,因此有$2p$个角域$S_j=\{z|\theta_j<\arg z<\theta_{j+1}\}\,(j=1,\cdots,2p)(\theta_{2p+1}=\theta_1)$.那么由引理4.2.3和*Borel*方向的定义,$A_s(z)$有如下性质:

(i) $\mu(A_s)=\rho(A_s)$.

(ii)对每个角域S_j而言,要么存在a_i,使得

$$\log\frac{1}{|A_s-a_i|}>C(\theta_j,\theta_{j+1},\varepsilon,\delta(a_i,A_s))T(|z|,A_s), \tag{4.7}$$

其中 $z\in\Omega(\theta_j+\varepsilon,\theta_{j+1}-\varepsilon,r,+\infty)$, $C(\theta_j,\theta_{j+1},\varepsilon,\delta(a_i,A_s))$是仅取决于$\theta_j,\theta_{j+1}$和$\delta(a_i,A_s)$的正常数;要么存在$\theta\in S_j$,使得

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log^+\log^+\left|A_s\left(re^{i\theta}\right)\right|}{\log r}=\rho(A_s). \tag{4.8}$$

为了简便,我们把$C(\theta_j,\theta_{j+1},\varepsilon,\delta(a_i,A_s))$记成$C$.

如果在S_j中存在a_i使得(4.7)式成立,那么在S_{j-1}和S_{j+1}中存在θ和θ'使得(4.8)式成立.相对应地,如果存在$\theta\in S_j$使得(4.8)式成立,那么在S_{j-1}和S_{j+1}中存在a_i和a_i'使得(4.7)式成立.

不失一般性,假设在 S_1 中存在射线 $\arg z=\theta$ 使得 (4.8) 式成立,因此在 $S_3,S_5,\cdots$,S_{2p-1} 中均存在射线使得 (4.8) 式成立.由引理 4.2.4 知这些角域的开度都为 $\frac{\pi}{\rho(A_s)}$.

(I) 当 $\rho(A_0)\geq\frac{1}{2}$ 时,由 *Phragmen* – *Lindelof* 定理知,存在一个角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ $(0\leq\alpha<\beta\leq2\pi)$,使得 $\beta-\alpha\geq\frac{\pi}{\rho(A_0)}$,并且对所有的 $\arg z=\theta(\alpha<\theta<\beta)$ 有

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log^+\log^+\left|A_0\left(re^{i\theta}\right)\right|}{\log r}=\rho(A_0). \tag{4.9}$$

因为 $\beta-\alpha\geq\frac{\pi}{\rho(A_0)}>\frac{\pi}{\rho(A_s)}$,所以存在角域 $\Omega\left(\alpha',\beta'\right)$ $\left(\alpha<\alpha'<\beta'<\beta\right)$ 以及 a_{j_0},使得对任意的 $\theta\left(\alpha'\leq\theta\leq\beta'\right)$ 有

$$\log\frac{1}{\left|A_s\left(re^{i\theta}\right)-a_{j_0}\right|}>CT(r,A_s). \tag{4.10}$$

由引理 4.2.1 可知,存在射线 $\arg z=\theta_0$ $\left(\alpha'\leq\theta_0\leq\beta'\right)$ 和 $R>0$,使得对所有的 $r>R$ 有

$$\left|\frac{f^{(j)}\left(re^{i\theta_0}\right)}{f\left(re^{i\theta_0}\right)}\right|\leq r^{n\rho(f)}. \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{4.11}$$

令 $\max\{\rho(A_1),\rho(A_2),\cdots\rho(A_{s-1}),\rho(A_{s+1}),\cdots\rho(A_{n-1})\}=\rho_0<\rho(A_0)$,则对任意给 ε $\left(0<\varepsilon<\left(\rho\left(A_0\right)-\rho_0\right)/2\right)$,存在 $R_1>0$,使得对所有的 $r>R_1$ 有

$$|A_j(z)|\leq\exp\{r^{\rho_0+\varepsilon}\} \ .(j\neq s) \tag{4.12}$$

注意到 (4.9) 式,因此存在一列 $\{r_m\}$, $\lim\limits_{m\to\infty}r_m=\infty$ 使得

$$\left|A_0\left(r_ne^{i\theta_0}\right)\right|\geq\exp\left(r_n^{\rho(A_0)-\varepsilon}\right), \tag{4.13}$$

再由

$$|A_0(z)|\leq\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)}\right|+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n-1}\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right||A_j(z)|+\left|\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)}\right||A_s(z)|, \tag{4.14}$$

以及 $(4.10)-(4.13)$ 式有

$$\exp\left(r_m^{\rho(A_0)-\varepsilon}\right) \le |r_m|^{n\rho(f)}\left(1+(n-2)\exp\left(r_m^{\rho_0+\varepsilon}\right)+\exp(-CT(r_m, A_s))\right). \tag{4.15}$$

对(4.15)式两边同时取 2 次对数再除以$\log r_m$,当m充分大时,可得矛盾.

(II) 当$\rho(A_0)<\frac{1}{2}$时,由于$A_0(z)$是一个超越的整函数,由[28],[29]的结果可知,对于任意$\theta\in[0,2\pi)$,有

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log\left|A_0\left(re^{i\theta}\right)\right|}{\log r}=\infty, \tag{4.16}$$

因此对任一射线$\arg z=\theta$,存在正整数M和任意大的正数N使得

$$\left|A_i\left(re^{i\theta}\right)\right|=O\left(r^M\right), \qquad (i\ne s) \tag{4.17}$$

$$\limsup_{r\to\infty}\left|A_0\left(re^{i\theta}\right)\right|r^{-N}=\infty. \tag{4.18}$$

而对$A_s(z)$而言,由上面的讨论,存在p个角域使得(4.7)式成立,再由(4.11),(4.14),$(4.16)-(4.18)$式有

$$r^N\le\left|A_0(z)\right|\le r^{n\rho(f)}\left(1+O\left(r^M\right)+\exp(-CT(r,A_s))\right), \tag{4.19}$$

因为N是任意大的,(4.19)式显然矛盾.

综上可知,定理4.1.1得证.

4.3.2 定理4.1.2的证明

先证(I) 当$\rho(A_s)<\rho(A_0)$,由定理4.1.1的证明可得.当$\rho(A_s)>\rho(A_0)$,由引理4.2.3和引理4.2.4知,存在$\frac{q_1}{2}$个开度为$\frac{\pi}{\rho(A_s)}$的角域使得

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log^+\log^+\left|A_s\left(re^{i\theta}\right)\right|}{\log r}=\rho(A_s), \tag{4.20}$$

同时存在$\frac{q_2}{2}$个开度为$\frac{\pi}{\rho(A_0)}$的角域使得

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\log^+\log^+\left|A_0\left(re^{i\theta}\right)\right|}{\log r}=\rho(A_0). \tag{4.21}$$

因为 $\dfrac{\pi}{\rho(A_0)} > \dfrac{\pi}{\rho(A_s)}$,所以存在 $0<\alpha<\beta<2\pi$ 使得对 $\forall\theta\in(\alpha,\beta)$, $A_s(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内有界,而 $A_0(z)$ 满足 (4.21) 式.类似定理4.1.1的证明可推出矛盾.

再证 (II)　因为 $\rho(A_s)=\rho(A_0)$,所以若满足 $q_1<q_2$;或者 $q_1=q_2$, $A_0(z)$ 的 *Borel* 方向的集合不同于 $A_s(z)$ 的 *Borel* 方向的集合;或者 $q_1>q_2$, $A_0(z)$ 的 *Borel* 方向的集合不是 $A_s(z)$ 的 *Borel* 方向的集合的子集.则存在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 使得 $A_s(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内有界,而对 $\forall\theta\in(\alpha,\beta)$, $A_0(z)$ 满足 (4.21) 式,由上面证明也可推出矛盾.

综上所述,定理4.1.2得证.

参考文献

[1]Bank S.,Liane I..On the oscillation theory of $f'' + A(z)f = 0$ where A is entire[J]. Trans.Amer.Math.Soc.,1982,273:351-363.

[2]杨乐.值分布论及其新研究[M].北京:科学出版社,1982.

[3]Hayman W..Meromorphic function [M].Oxford:Clarendon Press,1964.

[4]Chuang Chitai.On Borel directions of meromorphic functions of infinite order(II) [J].Bulletin of the Hongkong Mathematical Society,1999,2(2):305-323.

[5]Chuang Chitai.Sue les fonctions types[J].Sci.Sinica,1961,10(1):171-181.

[6]Goldberg A.,Ostrovskii I.V..The distribution of values of meromorphic functions in Russian [M].Moscow:Izdat Nauk,1970.

[7]Wu Shengjian.On the location of zeros of solution of $f''+Af=0$ where $A(z)$ is entire[J].Math Scand,1994,74:293-312.

[8]Laine I..Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations[M].New York: Walter de Gruyter,1993.

[9]高仕安,陈宗煊,陈特为.线性微分方程的复振荡理论[M].武汉:华中理工大学出版社,1998.

[10]石磊,易才凤.一类高阶线性微分方程解的增长性[J].江西师范大学学报(自然科学版),2012.36(3):230-233.

[11]刘旭强,易才凤.关于 2 阶线性微分方程 $f'' + Af' + Bf = 0$ 解的增长性[J].江西师范大学学报(自然科学版),2013,37(2):171-174.

[12]Wu Shengjian.Angular distribution in complex oscillation [J].Sci.China Ser.A, 2004,34(5):567-573.

[13]吴昭君,孙道椿.关于复振荡中的辐角分布[J].数学学报(中文版),2007,50(6): 1297-1304.

[14]田宏根,吴昭君.二阶亚纯系数微分方程解的零点分布[J].应用数学,2009,22(2)

:365-369.

[15]Zheng Jianhua.Value distribution of mermorphic functions[M].Berlin:Spring Verlag,2010.

[16]Wang Jun,Lv Weiran.On the fixed point and hyper order of mermorphic solutions of second order differential equation[J].Acta Math.Appl.Sin.,2004,27(1):72-80.

[17]Gundersen G..Finite order solution of second order linear differential equations[J].Trans Amer Math Soc,1988,305:415-429.

[18]Hellerstein S.,Miles J.,Rossi J..On the growth of solutions of $f'' + gf' + hf = 0$ [J].Trans Amer Math Soc,1991,324:693-705.

[19]Wu Pengcheng,Zhu Jun.On the growth of solutions of the complex differential equation $f'' + Af' + Bf = 0$ [J].Science China:Mathematics,2011(5):939-947.

[20]杨碧珑,易才凤.一类亚纯系数高阶线性微分方程解的增长性[J].江西师范大学学报(自然科学版),2012.36(5):477-481.

[21]Gundersen G..Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates[J].London.Math.Soc.,1988,37(2):88-104.

[22]陈宗煊,孙光镐.一类二阶微分方程的解和小函数的关系[J].数学年刊,2006,27A(4):431-442.

[23]Chen Zongxuan.Zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations[J].An-alysis,1994,14:425-438.

[24]Long Jianren,Wu Pengcheng, Zhang Zheng.On the growth of solutions of second order linear differential equations with extremal coefficients[J]. Acta Mathematica Sinica,English serier,2013(2):365-372.

[25]张广厚.整函数和亚纯函数理论[M].北京:科学出版社,1986.

[26]Chen Zongxuan,Gao Shian.The complex oscillation theory of certain nonhomogemeous linear differential equations with transcendental entire coefficients[J].Journal of mathematical analysis and applications,1993,179:403-416.

[27]Wu Shengjian.Some results on entire functions of finite lower order[J].Acta Mathematica sinica,English series,1994,10:168-178.

[28]Barry P.D..On a theorem of besicovitch[J].Qnart.J.Math.Oxford Ser,1963,14(2):

293-302.

[29]Chen Zongxuan,Yang Chongjun.Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations[J].Kodai Math J,1999 ,22:273-258.

致 谢

在本论文写作过程中,我的导师易才凤教授倾注了大量心血和汗水,在此我表示衷心的感谢.三年的研究生学习期间,易老师严谨的治学态度,渊博的知识,对事业的热爱和奉献精神以及平易和蔼的态度,给我留下了深刻的印象.易老师在学业上对我的谆谆教诲以及在生活中对我的无微不至的关心,教会了我许多为人处世待人接物的道理,使我受益匪浅,并终生难忘.在此,谨向我的导师易才凤教授致以最崇高的敬意和衷心的感谢.愿恩师身体健康,一生平安.

从本科到研究生,我一直在江西师范大学学习,在师大的这七年学习期间,离不开各位老师的指导与关心.是他们使我在这样一个学术氛围浓厚的环境中学习了很多知识,在此一并对他们表示衷心的感谢.

在论文的写作过程中,得到了许多同学的宝贵建议,特别是胡军、许淑娟等同门.此外,也得到了我的室友及全班同学的关心和帮助,他们都给予过我有益的帮助和支持,在此一并致以诚挚的谢意.

在此,我还要感谢我的家人,是他们长期在物质和精神上给我的支持和关心给了我学习的力量,让我能完成学业,在此说一声你们辛苦了.

最后,诚挚的感谢各位专家和教授,感谢你们在百忙之中参加论文的评阅和答辩.

攻读硕士学位期间完成的研究论文

[1]何涛,易才凤.复振荡中的辐角分布[J].江西师范大学学报(自然科学版),2012(5):453-456.

[2]何涛,易才凤.一类高阶亚纯系数线性微分方程解的增长性[J].已投稿.

[3]何涛,易才凤.一类高阶整系数线性微分方程解的增长性[J].已投稿.